平面波の側帯波不安定性についての再考 (乱流の解剖 : 構造とはたらきの解明)

藤村, 薫

数理解析研究所講究録 1406 巻 2004 年 148-153

平面波の側帯波不安定性についての再考

鳥取大学工学部　藤村　薫 (Kaoru Fujimura)

Departmentof Applied Mathematics and Physics
Tottori University, Tottori 680-8552

1．はじめに

2次元定常平行流に加えられた平面波の側帯波に対する安定性を調べる目的で，従来は主として3つの方法が用いられてきた．もっとも広く用いられるのは，流体方程式から弱非線形撹乱の時空間発展を記述する包絡線方程式を導いた上で，その方程式の持つ平面波解の側帯波に対する安定性を調べる方法である．つぎに数値的に側帯波不安定に対する安定境界を求める際にしばしば用いられるものとして，2次不安定解析を挙げることができる．第3の手法は，平面波と側帯波の時間発展を記述する力学系 (実空間で6次元) にもとづくものである．

ごく限られた状況下ではこれら3者の間に等価性が成り立つことが主張されてきたが，一般に等価性が成り立つかどうかについては，詳細な検討がされないまま別個に物理現象に適用されてきたというのが現状である．

ここでは，線形臨界点近傍にパラメターを限定するが，そこでは3者間に等価性が成り立つことを形式展開を用いて示すことにする．なお，包絡線方程式の導出とそれにもとづく側帯波不安定の解析法，2次不安定解析や，それらの間の等価性の詳細などについては文献 [1] を参照していただきたい．

2．若干の数学的準備

ここでは2次元定常平行流に加えられた撹乱の消長を考察する．すなわち，平面 Poiseuille 流における Tollmien-Schlichting 波や Rayleigh-Bénard 対流におけるロールが側帯波に対して安定であるかどうかが議論の対象である．そのため，撹乱としても2次元撹乱だけを考え，流れ関数を

$$\psi(x,z,t)=\bar{\psi}(z)+\hat{\psi}(x,z,t) \tag{1}$$

のように主流 $\bar{\psi}$ と撹乱 $\hat{\psi}$ に分解する．撹乱 $\hat{\psi}$ は次に従うものとする．

$$[\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{S}-\mathcal{L}(R)]\hat{\psi}=\mathcal{N}(\hat{\psi},\hat{\psi}). \tag{2}$$

また，ここでは議論を簡単にするために ψ の定義域を z 方向には有界であるとし，同次境界条件

$$\mathcal{H}\hat{\psi}=0 \text{ at } z=\pm 1 \tag{3}$$

を課す．(2) と (3) に含まれる $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$ は線形作用素，R は Reynolds 数や Rayleigh 数に代表される制御パラメターを表し，また $\mathcal{N}$ は2次の非線形項である．

(2) と (3) にノーマルモード

$$\hat{\psi}(x,z,t)=\phi(z)\mathrm{e}^{i\alpha x+\sigma t} \tag{4}$$

を代入すると，Orr-Sommerfeld 固有値問題に対応する

$$[\sigma S-L(R)]\phi=0,\quad H\phi=0 \text{ at } z=\pm 1 \tag{5}$$

を得る．Orr-Sommerfeld 方程式のように有界な z 位置で課された同次境界条件の下に固有値問題は離散無限個の固有値を持つと仮定し，それらを

$$\mathrm{Re}\,\sigma_1 > \mathrm{Re}\,\sigma_2 > \cdots \tag{6}$$

のように順序づける．さて，σ_n に属する線形固有関数を $\phi^{(n)}$，対応する随伴関数を $\tilde{\phi}^{(n)}$ とするとき，それらは

$$[\sigma_n S - L(R)]\phi^{(n)} = 0, \quad H\phi^{(n)} = 0 \text{ at } z = \pm 1 \tag{7}$$

$$[\bar{\sigma}_n S - \tilde{L}(R)]\tilde{\phi}^{(n)} = 0, \quad \tilde{H}\tilde{\phi}^{(n)} = 0 \text{ at } z = \pm 1 \tag{8}$$

に従う．作用素 S は通常自己随伴であるが，L は一般には Orr-Sommerfeld 作用素のように非自己随伴である．その場合には，固有関数間の直交性は成り立たず，代わりに従直交性

$$\langle \tilde{\phi}^{(n)}, S\phi^{(m)} \rangle \begin{cases} = 0 & \text{for } n \neq m \\ \neq 0 & \text{for } n = m \end{cases} \tag{9}$$

が成り立つ．

3．包絡線方程式による方法

線形固有値 σ は線形臨界点近傍で

$$\sigma(\alpha, R) = \sigma_c + (\alpha - \alpha_c)\sigma_\alpha + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_c)^2\sigma_{\alpha\alpha} + (R - R_c)\sigma_R + \cdots \tag{10}$$

のように Taylor-展開することができる．ここでは $\alpha R-$平面上で線形中立曲線が直線 $R = R_c$ と臨界点で 2 次の接触をしている状況を仮定し，$R - R_c \simeq \epsilon^2$ であるとすると，増幅波数帯の幅は ϵ，また，最大増幅モードの増幅率は ϵ^2 と評価することができる．そこで，

$$x_n = \epsilon^n x, \; t_n = \epsilon^n t \tag{11}$$

によって定義される緩やかに変化する時空間スケールを導入し，微分展開

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots \tag{12}$$

にもとづく多重尺度法を用いると，最終的に撹乱振幅に対する包絡線方程式

$$\frac{\partial a}{\partial t} = (R - R_c)\sigma_R a + \kappa\frac{\partial a}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \lambda|a|^2 a \tag{13}$$

を得る．係数 κ, μ と σ の間には

$$\kappa = -i\sigma_\alpha, \; \mu = -\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\alpha} \tag{14}$$

が成り立つ．波数 α における線形増幅率の勾配が 0 である場合，すなわち $\mathrm{Im}\,\kappa = 0$ が成り立つ場合，群速度で移動する座標系 $\eta = x + \kappa t$ を導入すると，(13) を Ginzburg-Landau 方程式

$$\frac{\partial a}{\partial t} = (R - R_c)\sigma_R a + \mu\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \lambda|a|^2 a \tag{15}$$

に帰着することができる.

(15) は平面波解

$$a = A_0 e^{i(k_0\eta - \gamma_0 t)} \tag{16}$$

を持つ. これに側帯波を摂動として加え, その時間的な消長を調べるのが包絡線方程式にもとづく解析法である. $\gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma_0$, $k_1 + k_2 = 2k_0$ を満足する γ_1, γ_2, k_1, k_2 を用いて

$$a(\eta, t) = A_0 e^{i(k_0\eta - \gamma_0 t)} + a_1 e^{i(k_1\eta - \gamma_1 t)} + a_2 e^{i(k_2\eta - \gamma_2 t)} \tag{17}$$

とすると, 側帯波の振幅 $a_1(t)$ と $a_2(t)$ は

$$\dot{a}_1 = (i\gamma_1 + \sigma - k_1^2\mu + 2\lambda|A_0|^2)a_1 + \lambda A_0^2 \bar{a}_2 \tag{18}$$

$$\dot{a}_2 = \lambda A_0^2 \bar{a}_1 + (i\gamma_2 + \sigma - k_2^2\mu + 2\lambda|A_0|^2)a_2 \tag{19}$$

に従うことが分かる. ただし, 側帯波の振幅は十分に小さいとして線形化を行った.

通常はこの後 (18), (19) の解を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} e^{st} \tag{20}$$

と表し, パラメター空間において $\mathrm{Re}\, s \leq 0$ となる領域を特定することになるが, 等価性を示す上では3つの手法が (18), (19) と同一の方程式を与えることを示すだけで十分である.

4. 2次不安定解析による方法

(2) に含まれる2次元撹乱 $\hat{\psi}$ が非線形的に相対平衡に達した状況を考える. そのとき, 撹乱の非線形相互作用の結果得られるある位相速度を用いた移動座標系 $\xi = x - ct$ に乗って観察すると, $\hat{\psi}$ は ξ の周期関数

$$\Psi(\xi, z) = \sum_n \Phi_n(z) e^{in\alpha\xi} \tag{21}$$

になっている. $\Phi_n(z)$ は一般に数値解析を通じて求められるため, (21) は等価性の議論には適していない. ここでは非線形相対平衡状態が弱非線形相互作用によって達成されたと仮定し,

$$\Psi = A\phi_{11} e^{i\alpha\xi} + c.c. + A^2\phi_{22} e^{2i\alpha\xi} + c.c. + |A|^2\phi_{02} + \cdots \tag{22}$$

のように表す. 主流と撹乱の和 $\bar{\psi} + \Psi$ に新たな2次元撹乱 $\hat{\psi}(\xi, z, t)$ を付加すると, $\hat{\psi}$ を支配する線形撹乱方程式は ξ についての周期関数を係数に含むため, Floquet の定理が成り立つ. Floquet 指数を ν と表すとき, 撹乱の複素振幅の Fourier 係数 Θ_n は次に従う.

$$\sum_n [\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{S} - \mathcal{L}(R)]\Theta_n e^{i(n\alpha + \nu)\xi}$$

$$= d\mathcal{N}(\bar{\psi} + A\phi_{11} e^{i\alpha\xi} + c.c. + A^2\phi_{22} e^{2i\alpha\xi} + c.c. + |A|^2\phi_{02} + \cdots) \sum_n \Theta_n e^{i(n\alpha+\nu)\xi}. \tag{23}$$

Θ_n の時間変化が側帯波の消長を決定するので, それを §3 の結果と比較するために注目するパラメターを線形臨界条件の近傍に限定する：

$$\alpha - \alpha_c = \epsilon,\ R - R_c = \epsilon^2 \tilde{R},\ \tilde{R} = O(1),\ A = \epsilon\tilde{A},\ \tilde{A} = O(1),\ \nu = \epsilon\tilde{\nu},\ \tilde{\nu} = O(1). \tag{24}$$

ゆるやかな時間スケール $t_n = \epsilon^n t$ を導入して多重尺度法を適用し，

$$\Theta_1 = \Theta_1^{(1)} + \epsilon\Theta_1^{(2)} + \epsilon^2\Theta_1^{(3)} + \cdots \tag{25}$$

のように Θ_1 を展開すると，

$$\Theta_1^{(1)} = \phi_{11}e^{\sigma_c t}a_1^{(1)}(t_1,\cdots),\ \Theta_1^{(2)} = a_1^{(2)}(t_1,t_2,\cdots)\phi_1 + (1+\tilde{\nu})a_1^{(1)}\phi_1^{(1)} \tag{26}$$

を得る．ここで得られた複素振幅をまとめて $b_1 = a_1^{(1)} + \epsilon a_1^{(2)} + \cdots$ のように表し，もとの時間スケールにもどすと，側帯波の振幅は次に従うことが結論できる．

$$\frac{db_1}{dt} = \sigma_c b_1(\epsilon+\nu)\sigma_\alpha b_1 + \frac{1}{2}(\epsilon+\nu)\sigma_{\alpha\alpha}b_1 + \sigma_R(R-R_c)b_1 + \lambda(A^2 b_{-1} + 2|A|^2 b_1). \tag{27}$$

(27) を (18), (19) と比較するには b_1 と a_1, a_2 が物理的に何を表しているのかに立ち帰って考えてみる必要がある．

	plane wave	side-bands
I	$A_0e^{i(\alpha_c+k_0)\eta}$	$a_1e^{i(\alpha_c+k_1)\eta}$, $a_2e^{i(\alpha_c+k_2)\eta}$
II	$Ae^{i(\alpha_c+\epsilon)\xi}$	$b_1e^{i(\alpha_c+\epsilon+\nu)\xi}$, $b_{-1}e^{-i(\alpha_c+\xi-\nu)\xi}$

この表から a_1 と b_1, a_2 と $\overline{b_{-1}}$ が対応しそうであることがわかるが，この対応関係は Rayleigh-Bénard 対流のように Ψ が定常状態である場合には厳密に成り立つ．一方，平面 Poiseuille 流における Tollmien-Schlichting 波のような相対平衡状態については，さらに踏み込んだ議論が必要となるが，そのような場合にも $b_1 = \hat{a}_1e^{-i\gamma_1 t}e^{-i(\alpha_c c_c - k_1\kappa)t}$ によって新たに側帯波の振幅 $\hat{a}_1$ を導入すると，$\hat{a}_1$ は (18) と完全に同一の発展方程式

$$\dot{\hat{a}}_1 = i\gamma_1\hat{a}_1 - k_1^2\mu\hat{a}_1 + \sigma\hat{a}_1 + \lambda(A^2\overline{\hat{a}_{-1}} + 2|A|^2\hat{a}_1) \tag{28}$$

に支配されることが結論される．

5．力学系による方法

時刻 $t=0$ に波数 α_0 の平面波と $\alpha_0 \pm \delta\alpha$ の側帯波が存在するとき，その後の時間発展を記述する力学系を導こう．まず，(2) が記述する撹乱を Fourier-級数と固有関数とで 2 重展開する．

$$\begin{aligned}\hat{\psi} = \sum_{j=1}[\,&A_{1,0}^{(j)}\phi_{1,0}^{(j)}e^{i\alpha_0 x} + c.c. + A_{1,\pm1}^{(j)}\phi_{1,\pm1}^{(j)}e^{i(\alpha_0\pm\delta\alpha)x} + c.c.\\ &+A_{2,0}^{(j)}\phi_{2,0}^{(j)}e^{2i\alpha_0 x} + c.c. + A_{2,\pm1}^{(j)}\phi_{2,\pm1}^{(j)}e^{i(2\alpha_0\pm\delta\alpha)x} + c.c. + A_{2,\pm2}^{(j)}\phi_{2,\pm2}^{(j)}e^{2i(\alpha_0\pm\delta\alpha)x} + c.c.\\ &+A_{0,1}\phi_{0,1}e^{i\delta\alpha x} + c.c. + A_{0,2}^{(j)}\phi_{0,2}^{(j)}e^{2i\delta\alpha x} + c.c. + A_{0,0}^{(j)}\phi_{0,0}^{(j)} + \cdots].\end{aligned} \tag{29}$$

これを (2) に代入して従直交性を適用すると，展開係数に対する無限次元の力学系

$$\dot{A}_{k,l}^{(j)} = \sigma_{k,l}^{(j)}A_{k,l}^{(j)} + \sum\lambda_{k,l}^{(j,p,q)}A_{k,l}^{(p)}A_{m,n}^{(q)} \tag{30}$$

を得る．ここで $A_{1,0}^{(j)}$，$A_{1,\pm1}^{(1)}$ のみが中心，もしくは不安定撹乱の振幅であり，それ以外はすべて安定撹乱の振幅である．ここで中心・不安定多様体の存在を仮定すると，中心・不安定多様体は次のように表される．

$$A_{k,l}^{(j)} = h_{k,l}^{(j)}(A_{1,0}^{(1)}, A_{-1,0}^{(1)}, A_{1,1}^{(1)}, A_{-1,1}^{(1)}, A_{1,-1}^{(1)}, A_{-1,-1}^{(1)}). \tag{31}$$

ここで $h_{k,l}^{(j)}$ は

$$h_{k,l}^{(j)}(0) = dh_{k,l}^{(j)}(0) = 0 \text{ for } (k,l,j) \neq (\pm 1, 0, 1), (\pm 1, 1, 1), (\pm 1, -1, 1) \tag{32}$$

を満たす非線形関数である．表記を簡単にするために $A_{1,-1}^{(1)} \to A_-$，$A_{1,0}^{(1)} \to A$，$A_{1,1}^{(1)} \to A_+$，$\sigma_{1,-1}^{(1)} \to \sigma_-$，$\sigma_{1,0}^{(1)} \to \sigma$，$\sigma_{1,1}^{(1)} \to \sigma_+$ とすると，平面波と側帯波の振幅を記述する力学系を得ることができる．

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{A}_- = \sigma_1 A_- + (\kappa_1^- |A_-|^2 + \kappa_2^- |A|^2 + \kappa_3^- |A_+|^2) A_- + \kappa_4^- \bar{A}_+ A^2, \\ \dot{A} = \sigma A + (\kappa_1 |A_-|^2 + \kappa_2 |A|^2 + \kappa_3 |A_+|^2) A + \kappa_4 \bar{A} A_+ A_-, \\ \dot{A}_+ = \sigma_+ A_+ + (\kappa_1^+ |A_-|^2 + \kappa_2^+ |A|^2 + \kappa_3^+ |A_+|^2) A_+ + \kappa_4^+ \bar{A}_- A^2. \end{array}\right. \tag{33}$$

$|A_-| \sim |A_+| \ll |A|$ を仮定すると，(33) は

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{A} = \sigma A + \kappa_2 |A|^2 A, \\ \left\{\begin{array}{l} \dot{A}_- = \sigma_- A_- + \kappa_2^- |A|^2 A_- + \kappa_4^- \bar{A}_+ A^2, \\ \dot{A}_+ = \sigma_+ A_+ + \kappa_2^+ |A|^2 A_+ + \kappa_4^+ \bar{A}_- A^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{34}$$

のように 2 種類のグループに分けることができるが，最初の方程式は単色波の弱非線形発展を記述する Stuart-Landau 方程式である．詳細はすべて省略するが，(34) に含まれる係数 κ_2，$\kappa_2^\pm$，$\kappa_4^\pm$ は，(18), (19) に含まれる多重尺度法を用いて線形臨界点で評価された Landau 定数 λ との間に

$$\lim_{\alpha \to \alpha_c, R \to R_c} \kappa_2 = \lambda \tag{35}$$

$$\kappa_2^\pm = 2\lambda + O(\epsilon^2),\ \kappa_4^\pm = \lambda + O(\epsilon^2) \tag{36}$$

の関係をもつことを示すことができる．したがって (34) の側帯波の振幅に対する方程式は

$$\mathrm{III}: \left\{\begin{array}{l} \dot{A}_- = \sigma_- A_- + 2\lambda |A|^2 A_- + \lambda \bar{A}_+ A^2, \\ \dot{A}_+ = \sigma_+ A_+ + 2\lambda |A|^2 A_+ + \lambda \bar{A}_- A^2 \end{array}\right. \tag{37}$$

と近似することができる．これが (18), (19) と一致することを示すためには $\sigma_\pm$ と $i\gamma_1 + \sigma - k_1^2 \mu$，$i\gamma_2 + \sigma - k_2^2 \mu$ が同一であることをいえればいい．そこで (2) を線形化し，そこに含まれる作用素を超臨界性 δ と臨界波数からのずれ ϵ のべきで

$$S \to S + \epsilon S_\alpha + \frac{\epsilon^2}{2} S_{\alpha\alpha} + \cdots,\ L \to L + \epsilon L_\alpha + \frac{\epsilon^2}{2} L_{\alpha\alpha} + \delta L_R + \cdots \tag{38}$$

のように展開し，攪乱を

$$\hat{\psi} = \mathrm{e}^{i\alpha_c x} [\sum_j A_j(t) \phi_1^{(j)}(z)] + c.c. \tag{39}$$

のように固有関数列で展開すると，展開係数に関する無限次元力学系

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \dot{A}_1 = \sigma^{(1)} A_1 + \epsilon \sigma_\epsilon^{(1)} A_1 + \frac{\epsilon^2}{2} \sigma_{\epsilon\epsilon}^{(1)} A_1 + \delta \sigma_\delta^{(1)} A_1 + \epsilon \sigma_{\epsilon 2}^{(1)} A_2 + \cdots, \\ \dot{A}_2 = \epsilon \sigma_{\epsilon 1}^{(2)} A_1 + \frac{\epsilon^2}{2} \sigma_{\epsilon\epsilon 1}^{(2)} A_1 + \sigma^{(2)} A_2 + \epsilon \sigma_\epsilon^{(2)} A_2 + \cdots, \\ \cdots \end{array}\right. \\ \dot{\epsilon} = 0, \\ \dot{\delta} = 0 \end{array}\right. \tag{40}$$

を得る．ここで，A_1 のみが中心モードの振幅であり，それ以外の $A_2, \cdots$ は安定モードの振幅である．中心多様体を

$$A_n = h_n(A_1, \epsilon, \delta) = \gamma_\epsilon^{(n)} \epsilon A + O(3), \ \cdots, \ n = 2, 3, \cdots \tag{41}$$

の形に表すと中心多様体低減の結果 $\hat{A}_1$ に対する振幅方程式

$$\dot{\hat{A}}_1 = [\,(\epsilon+\nu)\sigma_\alpha + \frac{1}{2}(\epsilon+\nu)^2\sigma_{\alpha\alpha} + \delta\sigma_R + 2\lambda|A|^2\,]\hat{A}_1 + \lambda A^2 \hat{A}_{-1} \tag{42}$$

を最終的に導くことができる．ただし，$A_1 = \hat{A}_1 e^{-i\alpha_c ct}$ とおいた．ここで (18) に含まれる係数を固有関数展開を用いてすべて評価し直すことにより，(42) と (18) が完全に一致することが結論できる．

6．まとめ

以上では (2) から出発して平面波の側帯波不安定の解析手法の間の等価性を形式的に示した．これによって，従来は暗に等価性を仮定して用いられてきた側帯波不安定に関する 3 種類の解析法の基礎付けを行うことができた．

実際にそれらを具体的な物理系に適用する際には，解析手法の適用範囲を考慮した上でいずれかの手法を選択することになる．最も適用範囲が広いのは 2 次不安定解析にもとづく方法であるが，これはかなり大がかりな数値解析を必要とする．残りの 2 つの手法はいずれも弱非線形理論にもとづくため，両者とも基本的には線形臨界点近傍に適用範囲が限定される．(力学系にもとづく解析手法は中心・不安定多様体低減が根拠になっているため適用範囲は臨界点近傍に限定されないと Cheng and Chang [2] は主張しているが，中心・不安定多様体の存在範囲を特定することはきわめて困難である．)

References

[1] 水島・藤村：流れの安定性 (朝倉書店 2003).

[2] M. Cheng and H.-C. Chang: *Phys.Fluids* A**2** (1990) pp.1364–1379.